Why is Analysis useful for INFK? ChatGPT;

24.2.25

1. **Machine Learning & Artific Intelligence**

    - Gradient Descent: Uses derivatives to minimize the error in training models.
    - Optimization: Helps fine-tune neural networks and other algorithms.
    - Backpropagation: Uses partial derivatives in deep learning to adjust weights.

2. **Computer Graphics & Game Development**

    - Rendering: Calculating light, shadows, and reflections using integrals.
    - Animation: Smooth motion and physics-based simulations use calculus.
    - Ray Tracing: Uses integrals to compute light behavior and shading.

3. **Cryptography & Security**

    - Elliptic Curve Cryptography: Based on calculus concepts for secure encryption.
    - Secure Hash Functions: Some cryptographic techniques involve continuous functions and their properties.

4. **Robotics & Control Systems**

    - Path Optimization: Uses calculus to find the best routes.
    - Kinematics & Dynamics: Uses derivatives to model velocity and acceleration of robots.

5. **Computer Vision & Image Processing**

    - Edge Detection: Uses derivatives (like Sobel and Laplacian operators) to detect image edges.
    - Fourier Transforms: Uses integration to process images and signals.

6. **Data Science & Signal Processing**

    - Fourier & Laplace Transforms: Used in signal processing for filtering and compression.
    - Probability Density Functions: Integrals are used to compute probabilities in continuous distributions.

7. **Algorithm Optimization & Analysis**

    - Asymptotic Analysis: Uses limits to evaluate algorithm efficiency (Big-O notation).
    - Numerical Methods: Uses calculus to approximate solutions for complex problems.

8. **Physics Simulations**

    - Simulating real-world physics (e.g., fluid dynamics, gravity, aerodynamics).
    - Used in scientific computing, weather modeling, and virtual environments.

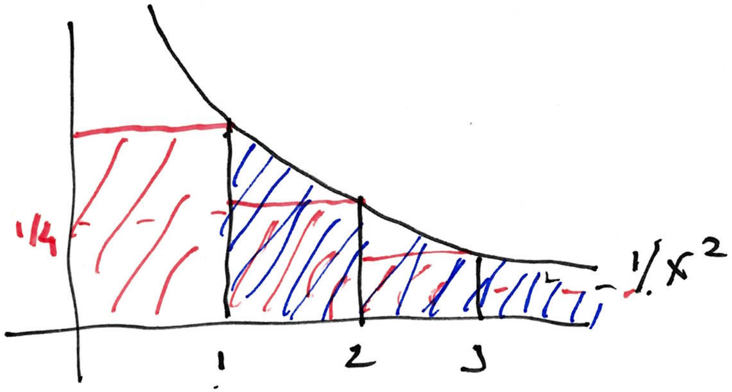
Calculus is a backbone for many advanced techniques in CS, especially in AI, graphics, and optimization.

"Toy Problem"

Angenommen,

$$S = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

$S = ?$



$$\boxed{S = \frac{\pi^2}{6}}$$

Euler

Fläche unter den Graph von $\frac{1}{x^2}$ von 1 bis ∞ =

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1$$

$$S = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$S \le 1 + \underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx}_{1}$$

$$S \le 2$$

$$S = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots \ge 1$$

d.h. $1 \le S \le 2$

Kapitel 1

Reelle Zahlen

Euklidische Räume

Complexe Zahlen.

Natürliche Zahlen

$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$.

$x + 1 = 0$

$\mathbb{Z} := \{\dots -2, -1, 0, 1, \dots\}$

Ganze Zahlen

$2x + 3 = 0$

Rationalen Zahlen

$\mathbb{Q} := \{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \}$.

$x^2 - 2 = 0$.

$\mathbb{R}$ – reelle Zahlen.

$\mathbb{R} \to$ "Vervolständigung" den $\mathbb{Q}$.

Axiomensystem für die reellen Zahlen.

Regeln der Addition (Abelsche Gruppe)

A.i) Assoziativität: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \quad x+(y+z)=(x+y)+z$

A.ii) Neutrales Element: $\exists\, 0 \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}: \quad x+0=x$

A.iii) Inverses Element: $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}: \quad x+y=0 \qquad y=:-x$

A.iv) Kommutativität: $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad x+y=y+x$

$(\mathbb{R},+)$ ist eine Abel. Gruppe.

Regeln der Multiplikation

M.i) Assoziativität: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \quad x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$

M.ii) Neutrales Element: $\exists\, 1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \quad \forall x \in \mathbb{R}: \quad x\cdot 1=x$

M.iii) Inverses Element: $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \quad \exists y \in \mathbb{R}: \quad x\cdot y=1$

M.iv) Kommutativität: $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad x\cdot y=y\cdot x$

$(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$ ist Abel. Gruppe.

Distributivitäts-Gesetz

D) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \quad x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$

$(\mathbb{R},+,\cdot)$ ist eine Körper.

$(\mathbb{R},+,\cdot)=:\mathbb{R}$ ist ein **Körper**. $(\mathbb{R},+)$ ist eine abelsche Gruppe bezüglich der Addition

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ (bezüglich der Multiplikation) ist eine abelsche Gruppe.

$\mathbb{R}^* = (\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$

$\mathbb{R}$ ist ein angeordneter Körper.

Auf $\mathbb{R}$ gibt es eine Ordnungrelation: $\leq$

Ordnungsaxiome

O1) Reflexivität: $\forall x \in \mathbb{R}: \quad x \leq x$

O2) Transitivität: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

O3) Antisymmetrie: $\forall x, y \in \mathbb{R}: x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$

O4) Total: $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad x \leq y$ oder $y \leq x$

Die Ordnung ist konsistent mit Addition und Multiplikation

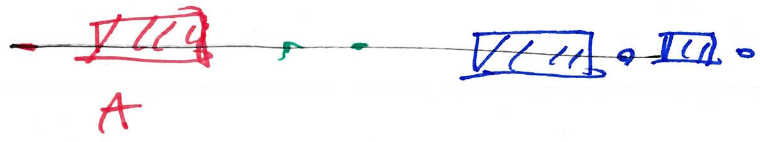
K1) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \quad x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$

K2) $\forall x \in \mathbb{R}^+$ (i.e $x \geq 0$) und $\forall y \geq 0: \quad x \cdot y \geq 0.$

$\mathbb{R}$ ist eine angeordneter Körper

aber $\mathbb{Q}$ ist auch!

Ordnungvollständigkeit unterscheidet $\mathbb{R}$ von $\mathbb{Q}$



Ordnungvollstendigkeit (V)

Seien A, B Teilmengen von $\mathbb{R}$

so dass ① $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$

② $\forall a \in A$ und $\forall b \in B$ gilt: $a \leq b$

Dann gibt es $c \in \mathbb{R}$ so dass

$\forall a \in A$ $a \leq c$ und

$\forall b \in B$ $c \leq b$.

Satz 1.1.2 $\mathbb{R}$ ist ein angeordneter Körper, der Ordnung vollständig ist.

Notation: $a > b$

bezeichnet

$a \geq b$ und $a \neq b$.

Folgerungen der Axiome

Kor 1.1.6 ① Die Additiven und Mult. Inverse sind eindeutig bestimmt.

② $0 \cdot x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

③ $-1 \cdot x = -x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Insbesondere $(-1)^2 = 1$.

④ $y \geq 0 \Leftrightarrow (-y) \leq 0$

⑤ $y^2 \geq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$

Insbesondere $1 = 1 \cdot 1 \geq 0$

⑥ $x \leq y$ und $u \leq v \Rightarrow x + u \leq y + v$

⑦ $0 \leq x \leq y$ und $0 \leq u \leq v$.

$\Rightarrow x \cdot u \leq y \cdot v$.

Beweis (1) Sei $x \in \mathbb{R}$ gegeben mit $y, z \in \mathbb{R}$ zwei Additiven Inversen von x

z.z $y = z$

$$y = y + 0 \underset{(**)}{=} y + (x+z) = (y+x) + z \underset{(*)}{=} 0 + z = z$$

$x + y = 0$ (*)

$x + z = 0$ (**)

(3) $x + (-1)\cdot x \underset{M2}{=} 1\cdot x + (-1)\cdot x$

$= (1 + (-1))\cdot x = 0\cdot x = 0$

$(-1)\cdot x = -x$

Kor 1.1.7 (Archimedisches Prinzip)

(1) Sei $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ und $y \in \mathbb{R}$. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $y \leq n\cdot x$

(2) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert genau ein $n \in \mathbb{Z}$ mit

$$n \leq x < n+1$$

Beweis Übung.

Eine wichtige Folgerung des Vollständigkeitsaxiom (V)

$\boxed{\text{Es gibt } c \in \mathbb{R} \text{ mit } c^2 = 2}$

Beweis Sei $A := \{a \in \mathbb{R} \mid 1 \leq a \leq 2$
$a^2 \leq 2\}$

$B := \{b \in \mathbb{R} \mid 1 \leq b \leq 2, \ b^2 \geq 2\}$.

Dann gelten ① $1 \in A$, $A \neq \emptyset$
$2 \in B$, $B \neq \emptyset$

② $\forall a \in A, b \in B$, $a \leq b$.

Beweis ② Falls $a \gneq b$, dann

folgt $a \cdot a \gneq b \cdot b$

Aber dann haben wir $a^2 > b^2 \geq 2$

↯ Wiederspruch $(a^2 \leq 2)$

Nach (V) gibt es $c \in \mathbb{R}$ mit

$a \leq c \ \ \forall a \in A$ und

$c \leq b \ \ \forall b \in B$.

Insbesondere $1 \leq c \leq 2$

Wir zeigen nun dass $c^2 = 2$.

Anderfalls entweder

(I) $c^2 < 2$ oder (II) $c^2 > 2$

Im Fall (I) da $c^2 < 2$, $c \in A$

(Wir nehmen an dass $c^2 \neq 2$)

$2 - c^2 > 0$, $2c + 1 > 1$

Wir können Archm. Prinzip anwenden mit $x = 2 - c^2 > 0$
$y = 2c + 1$.

Dann gibt es $1 \leq n \in \mathbb{N}$ mit

$$\boxed{(2c+1) \leq n(2-c^2)} \quad (*)$$

Mit dieser Wahl von n, gilt

$$\left(c+\frac{1}{n}\right)^2 = c^2 + 2c\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$$

$$\leq c^2 + 2c \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$$

$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$

$$\leq c^2 + \frac{1}{n}[2c+1]$$

$$\underset{(*)}{\leq} c^2 + 2 - c^2 = 2$$

d.h. $\left(c+\frac{1}{n}\right)^2 \leq 2$

Da $\left(c+\frac{1}{n}\right)^2 \leq 2$,

$\left(c+\frac{1}{n}\right) \leq 2$ (Andernfalls $\left(c+\frac{1}{n}\right)^2 \geq 4$.)

Da $\forall a \in A, b \in B \quad a \leq c \leq b$,

$c \geq 1$ d.h. $c + \frac{1}{n} \geq 1$

d.h. $1 < c + \frac{1}{n} \leq 2$
und $\left(c+\frac{1}{n}\right)^2 \leq 2$ $\Big\} \Rightarrow c + \frac{1}{n} \in A$

$\Rightarrow c + \frac{1}{n} \leq c$ ↯ (Da $\forall a \in A$ $a \leq c$)

Fall (II) ist ähnlich.

Und erhalten wir dass

$c^2 = 2$.

Satz 1.1.8 Für jedes $t \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung $x^2 = t$ eine Lösung in $\mathbb{R}$

Bmk Für $t \geq 0$ gibt es genau eine Lösung $x^2 = t$ mit $x \geq 0$. Sie wird mit $\sqrt{t}$ bezeichnet

Bmk Die Rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \right\}$$

erfüllen das Vollständigkeitsaxiom NICHT.!

Denn $A := \{ a \in \mathbb{Q} \mid 1 \leq a \leq 2,\ a^2 \leq 2 \}$
$B := \{ b \in \mathbb{Q} \mid 1 \leq b \leq 2,\ b^2 \geq 2 \}$

Wenn die Zahl $c \in \mathbb{Q}$ existiert (s.d. $\forall a \in A, \forall b \in B$ $a \leq c$ und $c \leq b$) wie oben, würde es auch $c^2 = 2$ erfüllen.

Aber wir wissen schon dass keine rationale Zahl $c \in \mathbb{Q}$ gibt mit $c^2 = 2$

Defn 1.1.9. $x, y \in \mathbb{R}$

① $\max\{x, y\} := \begin{cases} x & \text{falls } y \leq x \\ y & \text{falls } x \leq y \end{cases}$

② $\min\{x, y\} := \begin{cases} y & \text{falls } y \leq x \\ x & \text{falls } x \leq y \end{cases}$

③ Der **Absolutbetrag** einer Zahl $x \in \mathbb{R}$

$|x| := \max\{x, -x\}$

$= \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{sonst.} \end{cases}$

Satz 1.1.10

① $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

② $|x+y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$

③ $|x+y| \geq \big||x| - |y|\big| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$

Bmk: $x \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

Satz 1.1.11 Young'sche Ungleichung

$\forall \varepsilon > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$2|xy| \leq \varepsilon \cdot x^2 + \frac{1}{\varepsilon} y^2$

Beweis

$$\left(\sqrt{\varepsilon}\,|x| - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}|y|\right)^2 \geq 0$$

$$\varepsilon|x|^2 - 2|x||y| + \frac{1}{\varepsilon}|y|^2 \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\varepsilon x^2 + \frac{1}{\varepsilon}y^2 \geq 2|x||y|$$

$$= 2|xy|$$

$\blacksquare$